

Mathematik des Lebendigen

Gerhard Mack

Ringvorlesung Mathematische Modellierung in den
Lebenswissenschaften

Hamburg 9. November 1999

These: Alle komplexen Systeme sind ähnlich in der Weise wie wir sie geistig bewältigen:

Der menschliche Geist denkt in Beziehungen zwischen Dingen oder Agenzien

Allgemeiner Rahmen:

math. Kategorientheorie + Nahwirkungsprinzip.

Agenzien lokaler Strukturveränderungen (“Enzyme”)

eingebaut: **Universalchemie** \Rightarrow Simulation von

Lebensvorgängen wie in der Biochemie.

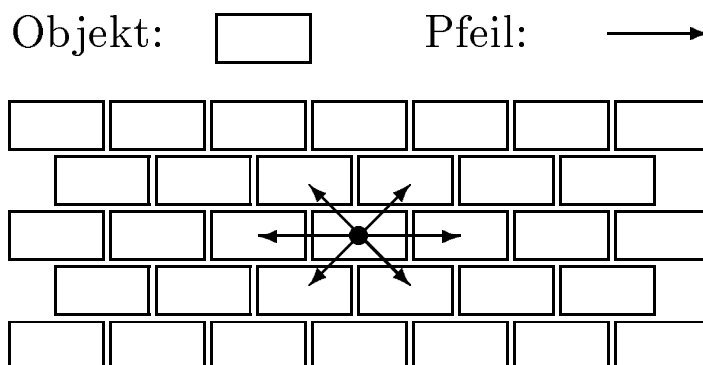
Lawvere 1963: Kategorien \Rightarrow ganze Mathematik?

zur Naturbeschreibung fehlt etwas: Nahwirkungsprinzip

(= Lokalität)

Definiere **System** \equiv lokale Kategorie.

Wie beschreibt man Struktur ?



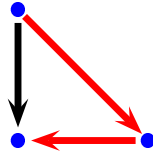
1. Struktur wird durch ein Netzwerk von Beziehungen f zwischen **Objekten** X beschrieben. Die Beziehungen werden durch **Pfeile** dargestellt,
 $f : X \mapsto Y, g : Y \mapsto Z \dots$ Pfeile können zusammengesetzt werden $g \circ f : X \mapsto Z$.
Freund eines Freunds, Schwiegervater, Neffe,...
2. Unter den Beziehungen (Pfeilen) ist die **Identität** eines jeden Objekts mit sich selbst.
3. Jeder Pfeil f bestimmt einen **gegengerichteten Pfeil** f^* .
Ehemann \leftrightarrow Ehefrau, Bruder \leftrightarrow Bruder/ Schwester, eine Hand wäscht die andere
4. Gewisse Pfeile werden als fundamental ausgezeichnet (**“Kanten”**), alle andern können daraus zusammengesetzt werden.

Innere Struktur von Objekten erlaubt: Systeme als Objekte.
Welt als reine Form - Objekte sekundär.

Typen lokaler Transformationen

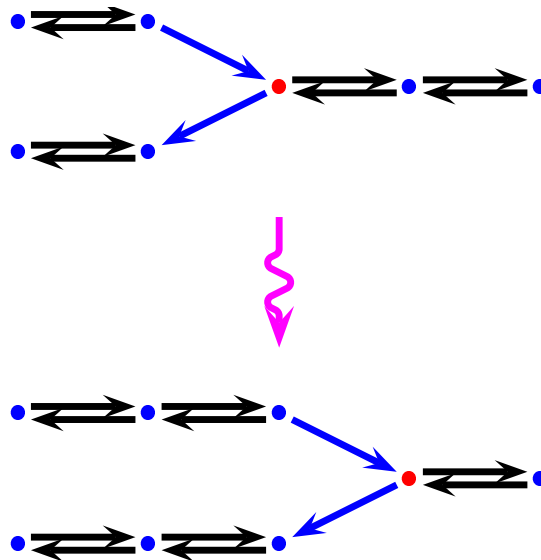
Bewegung :

Zusammengesetzte Pfeile werden fundamental



Wachstum :

Kopiere Objekte, füge entgegenges. Kanten hinzu



Kognition :

Erzeuge Kante zwischen zus.gesetzten Objekten mit passender innerer Struktur.

Enzym-Management : Verschiebe, erzeuge, vernichte Enzyme. [Unmöglich in Hamilton'scher Dynamik]

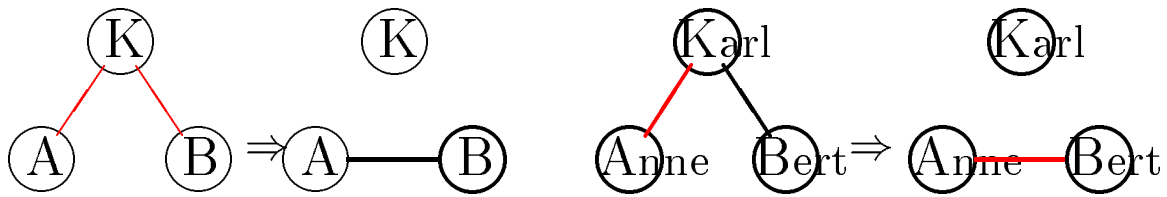


Figure 1: **Katalyse in der Chemie** (und anderswo). Katalysator K bindet Moleküle A und B. Zuerst wird ein Substrat-Enzym-Komplex gebildet, worin A und B an K gebunden sind. Dann wird der zusammengesetzte Pfeil zwischen A und B in einen fundamentalen verwandelt

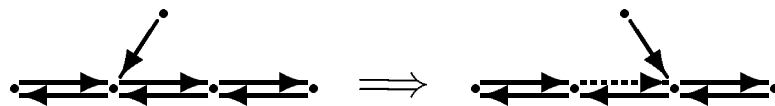


Figure 2: Interpretation von **Bewegung im Raum als Transformation eines zusammengesetzten Pfeils in einen fundamentalen**. Der obere Punkt repräsentiert ein Teilchen, die anderen Raumpunkte. Die Kante vom Teilchen zum Punkt x stellt die Beziehung "bei" dar. Bewegung findet statt, wenn der zusammengesetzte Pfeil aus Beziehung b des Teilchens zu seiner früheren Position und der Beziehung dieses Punkts zu seinem Nachbarn fundamental wird.

Fundamentale Physik: $hin \circ zurück = Identität$

(nichtdissipativ)

\Rightarrow ganze Struktur der Eichtheorien:

Eichgruppe, Hauptfaserbündel, ...

Dynamik: zusammengesetzt aus **Mechanismen:** Bedingte Wirkung lokaler Strukturveränderungen = **Enzyme:** $\perp \Rightarrow \Delta$

Drama: System aus Systemen $\dots S_{t-1}, S_t, S_{t+1} \dots$

Objekte in S_t mit Abkömmlingen in S_{t+1} verbunden.

S_{t+1} wird aus S_t erzeugt durch Agenzien (“Enzyme”), die lokale Strukturveränderungen verursachen.

Problem der Gleichzeitigkeit

berücksichtigt, vgl. Petri Netze

Problem: Wohldefinierte Dynamik $T : S_t \mapsto S_{t+1}$

(deterministisch oder stochastisch)

obwohl Wirkung von Enzymen an Nachbarn i.a. nicht zu kommutieren braucht (Replikationsgabel ist ok).

Eine **Lösung:** $T = T_2 T_1$

$$T_1 = \prod_{\rightarrow \bullet \leftarrow} T_{\rightarrow \bullet \leftarrow}^1$$

wirkt nur auf $\rightarrow, \bullet, \leftarrow$,

$$T_2 = \prod_{\Leftrightarrow} T_{\Leftrightarrow}^2$$

wirkt nur auf

$$\Leftrightarrow = \rightarrow, \leftarrow .$$

Alle $T_{\rightarrow \bullet \leftarrow}^1$ kommutieren, ebenso alle T_{\Leftrightarrow}^2 .

Dynamik führt zu Bedingungen an das Drama, typisch

$$s = \text{id.}$$

für bestimmte Pfeile (Schleifen) $s : X \mapsto X$.

Beispiel: Maxwell Theorie incl. Gauss-Gesetz

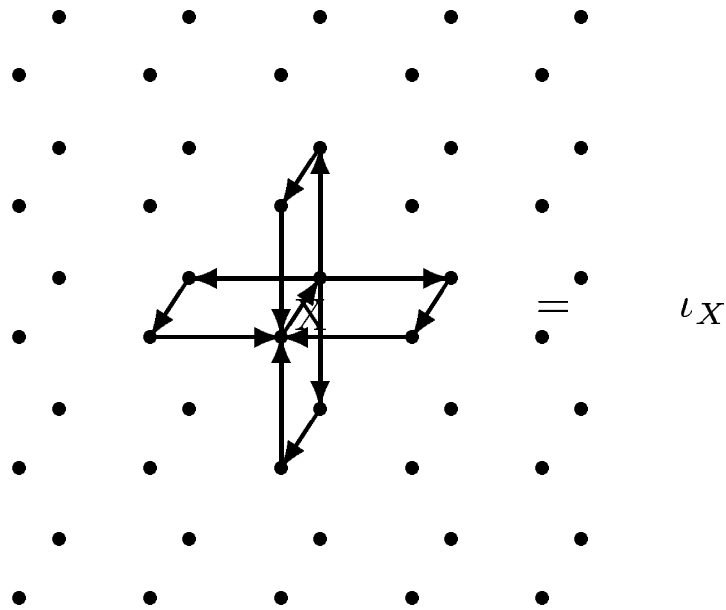


Figure 3: Maxwell Yang Mills Drama. Bewegungsgleichungen (Zeit nach oben), Gauss Gesetz (Zeit nach hinten). Kanten des Dramas (zwischen nächsten Nachbarn des Gitters) sind nicht gezeichnet.

Erläuterung (für Physiker): Pfeile zusammengesetzt mit +.

$$\bullet \rightarrow \bullet = \int \mathbf{A} d\mathbf{x} \approx \mathbf{A}(x) dx \quad \text{somit} \quad (1)$$

$$\square = \oint_{\square} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \int_{F:\partial F=\square} \mathbf{B} d\mathbf{f} \quad (2)$$

Summation über waagerechte Quadrate an \rightarrow gibt $\nabla \times \mathbf{B} \cdot$ Fläche, senkrechtes Quadrat gibt $-E = \dot{\mathbf{A}}$.

Konsistenz dieser Gleichung impliziert die Erhaltung der elektrischen Ladung!

Die Unzerstörbarkeit der Materie kommt aus einer strukturellen Beschreibung heraus!

Beispiel für Nebenbedingung: Gauss' Gesetz.

Was ist Komplexität?

Das Verhalten eines komplexen Systems kann nicht durch Betrachtung von Untersystemen aus wenigen Objekten verstanden werden. **Gegenbeispiel:** verdünntes Gas (Ggs: kritischer Punkt)

Wie versteht man komplexe Systeme?

Durch Mehrskalanalyse.

In jedem Schritt werden gewisse Untersysteme ausgewählt und zu zusammengesetzten Objekten ernannt.

Fundamentale Pfeile zwischen diesen werden konstruiert, sowie ggf. eine Dynamik der zusammengesetzten Objekte aus der Dynamik ihrer Konstituenten. **kognitiver Akt!**

Anpassung und Auslese größerer Strukturen

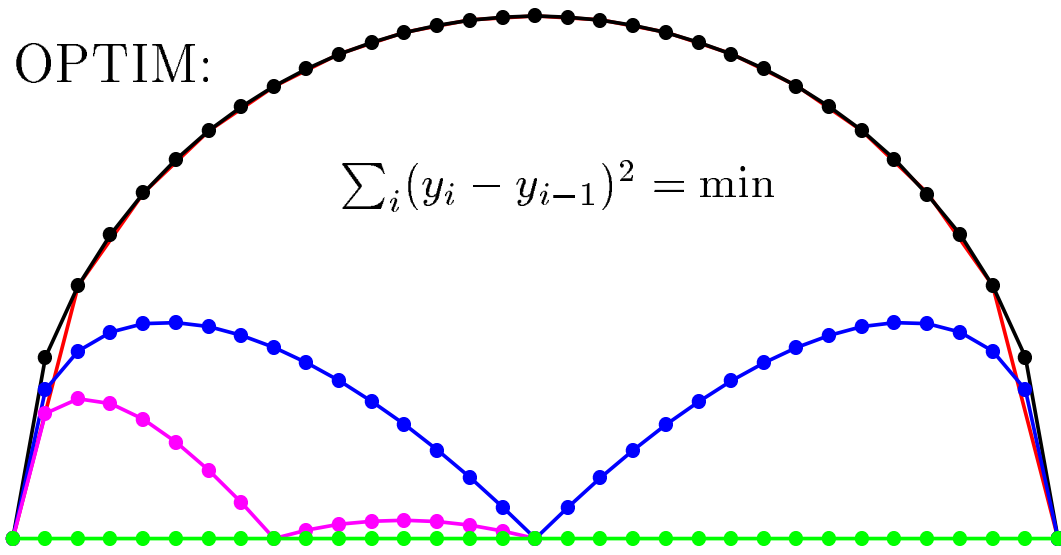
Evolution:

- Kopier- und Übersetzungsprozesse
- Schaffung neuer Möglichkeiten [Mutation, Kreuzung: $ACB + A'CB' \mapsto ACB' + \dots$, Kopierfehler]
- Auslese

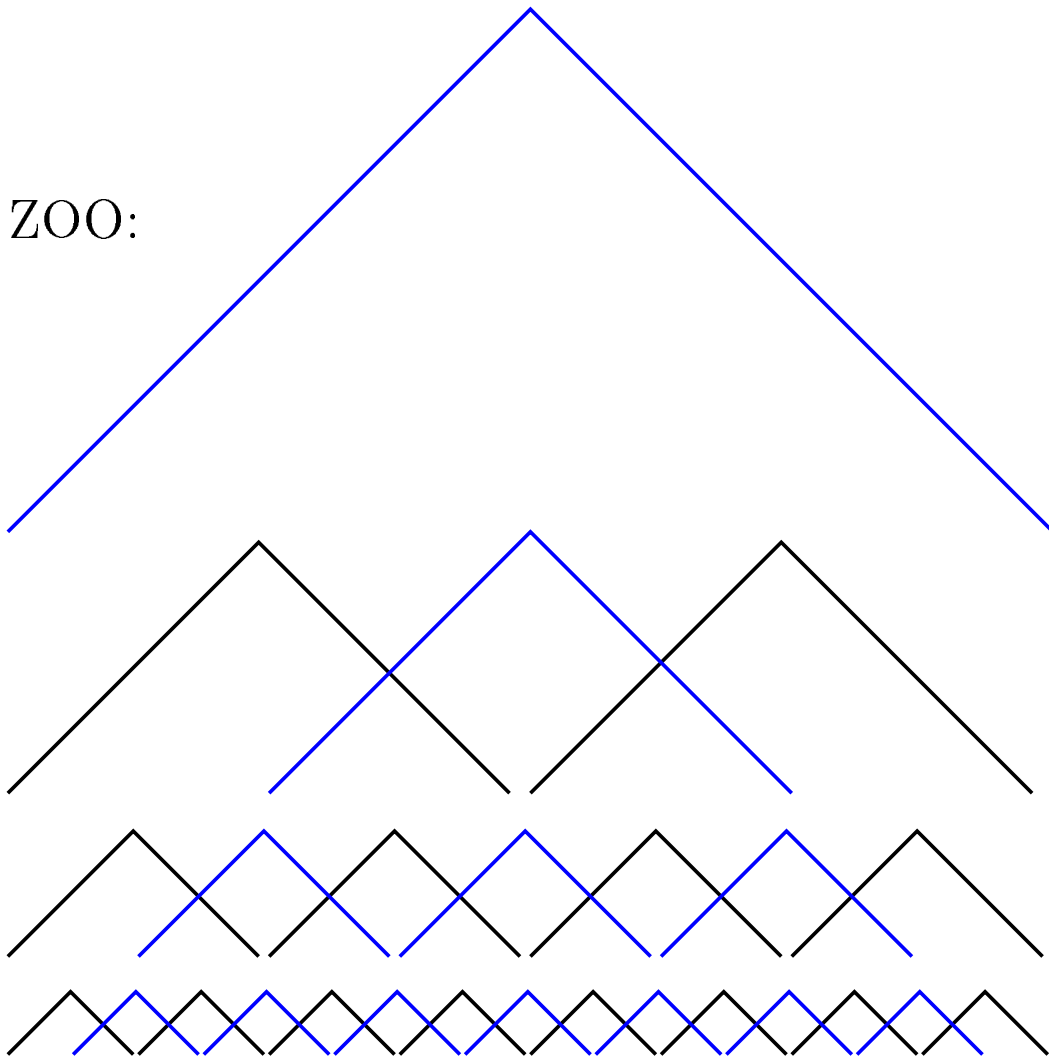
Illustration: Zucht einer Flora oder Fauna fehler-fressender Organismen.

OPTIM:

$$\sum_i (y_i - y_{i-1})^2 = \min$$



ZOO:



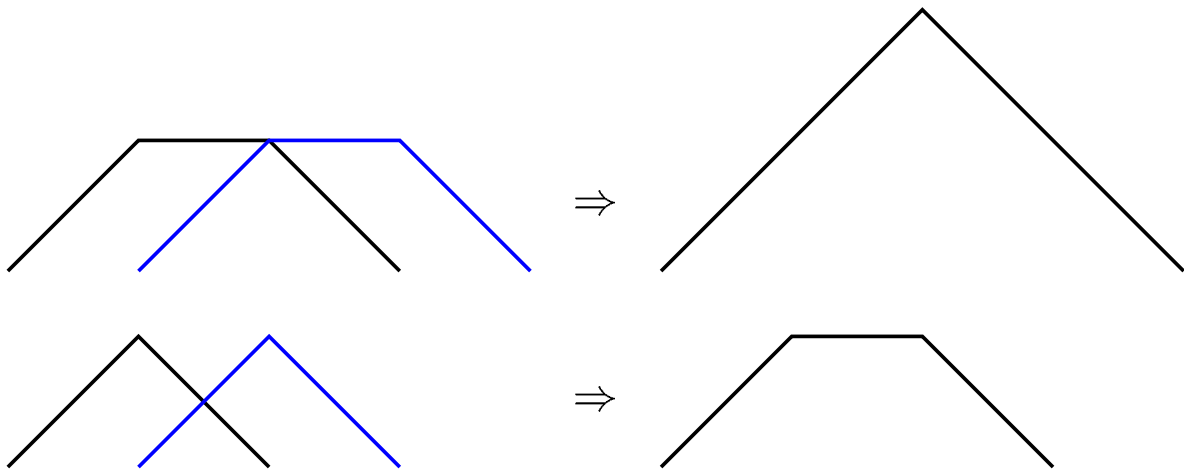


Figure 4: Kreuzung: Nachkommen von Paaren

Kombination von Trägern: $AC + CA^* \Rightarrow ACA^*$

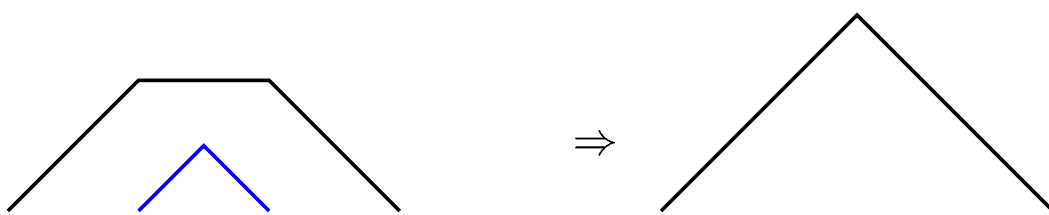


Figure 5: Mutation

Lokale Wirkung kleinerer Organismen auf grössere.

Emergentes Verhalten

Schulen von Fischen: Die Fische zeigen kohärentes Verhalten. Sie schwimmen zusammen, und wenden plötzlich zusammen, ohne daß die Gruppe einen Führer hätte. [sog. autonome verteilte Systeme, incl. Immunsystem].

Analog: Gruppen modebewußter Menschen, die Befriedigung darin finden, immer dem neuesten Trend zu folgen. Hat sich ein Trend durch eine Untergruppe von Anhängern etabliert, so werden andere, die mit deren Mitgliedern in Kontakt kommen, mit hoher Wahrscheinlichkeit bekehrt.

Danach sind die neu Bekehrten jedoch für einige Zeit gehindert, sich noch wieder einem andern Trend anzuschließen. Als Resultat breitet sich die Grenze der Gruppe der Anhänger **Schockfront**-artig aus. Mittlerweise kann sich im Innern der Gruppe aber schon der nächste Trend formieren.

Stochastische Dynamik \Rightarrow das ganze Drama kann als **Gleichgewichtszustand eines 4-dimensionalen Systems mit wiederhergestellter spontan gebrochener Symmetrie** modelliert werden. Schockwellen sind Defekte, die die Symmetrie wiederherstellen.

Simulationen des Immunsystems (des Menschen)

software Paket **SIMMUNE**.

Agenzien: Immunzellen (weiße Blutkörperchen), Moleküle (Antikörper, Cytokine, Rezeptoren)

Antigene: Vom Immunsystem mittels spezieller Rezeptoren erkannte Strukturen - Teile organ. Moleküle - auf Parasiten, körpereigenem Gewebe etc.

Aufgaben: Abwehr von Parasiten (Bakterien, Viren), Instandhaltung incl. "Müllabfuhr".

Fehlsteuerung: Autoimmunkrankheiten: Multiple Sklerose, Jugenddiabetes, chron. Polyarthrit. Körpereigenes Gewebe wird angegriffen.

Mechanismen sind teilweise bekannt, aber oft nur qualitativ. Der Benutzer kann Mechanismen vorgeben, und das Zusammenwirken der Agenzien, ihren Erfolg bei der Bekämpfung von Parasiten sowie Collateralschäden verfolgen.

Beispiel B-Zelle mit gebundenem Antigen sekretiert Antikörper, die an solches Antigen binden können.

[**Tatsächlich mehrere Stufen dazwischen ...**].

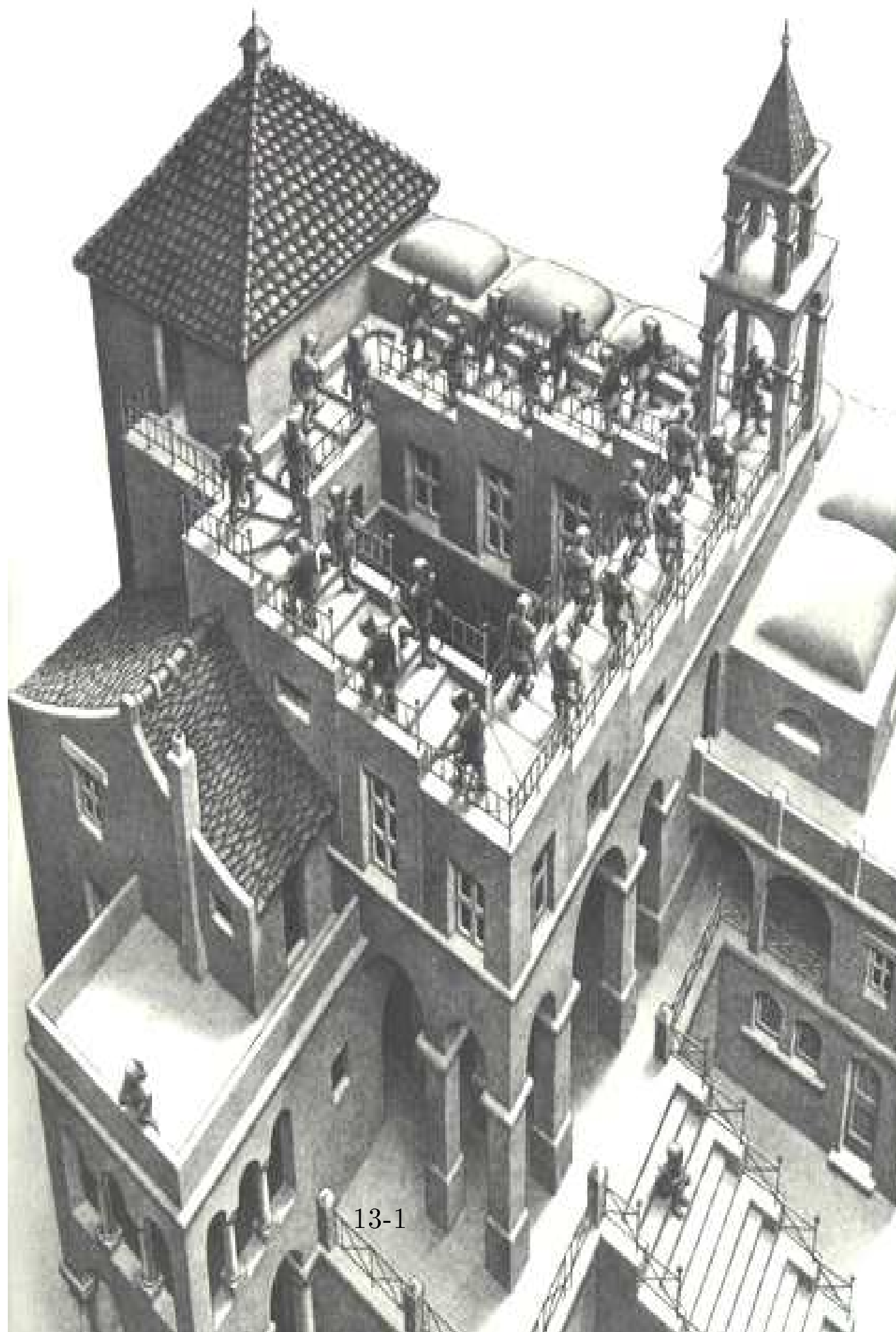
Frustration

Def: **Frustration** besteht, wenn es mehrere Pfeile zwischen 2 gegebenen Objekten gibt (“Wegabhängigkeit”).

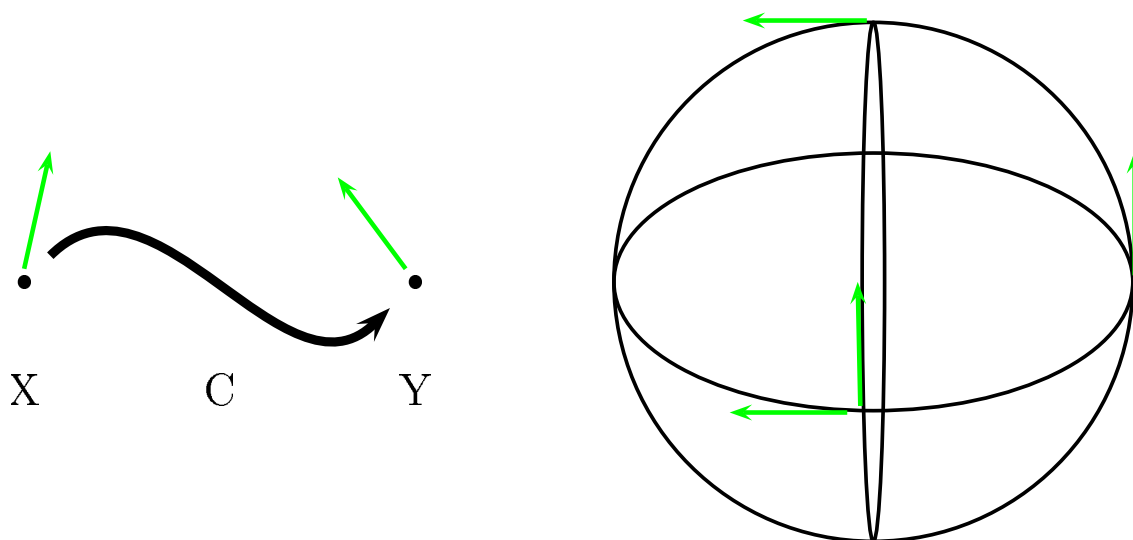
Elektrodynamik Eichtheorien der Elementarteilchen	Feldstärke, z.B. elektrische magnetische
Flächen im Raum Allgemeine Relativitätstheorie	Krümmung
Finanzmärkte	Arbitrage
Systemtheorie Spin Gläser	Frustration
Eschers Bilder	Unmöglichkeit

Table 1: Frustration unter verschiedenem Namen

Satz: **Ohne Frustration keine Bewegung**



Paralleltransport von Vektoren in der allgemeinen Relativitätstheorie



Darstellungs-Satz: *Kanten können immer als Abbildungen $b : \Omega_X \mapsto \Omega_Y$ aufgefasst werden, und definieren somit einen verallgemeinerten Zusammenhang im Sinn der Differentialgeometrie.*

Geometrische Theorie!

vgl. Spinoza: Ethik nach Art der Geometrie demonstriert.

Mitarbeiter am Projekt

Doktoranden

Martin Meier-Schellersheim (Immunologie)

Jan Würthner (C^{++} -Implementation,
enzymatisches Spiel des Lebens)

Diplomanden

Markus Schrattenholzer (Logik lokal)

Dirk Rathje (allg. Systemtheorie)

Claudia Lehmann (evolutionäre
Mehrskalenverfahren)

in früheren Stadien:

York Xylander, Ute Kerres, Bleicke Holm, Daniel Lübbert,
Marcus Speh.

Mehrgitter: Martin Bäker, Thomas Kalkreuter

home page: <http://lienhard.desy.de/mackag>

Glossar Systemtheorie:

<http://lienhard.desy.de/mack/glossary.ps>