Systemtheoretische Grundlagen universeller Problemlösungsstrategien

Gerhard Mack

Seminar Hamburg Harburg 9 Januar 1996

I. Allgemeiner Rahmen.

Abstraktion ist der Vater der Ökonomie.

Wie beschreibt man Struktur?.

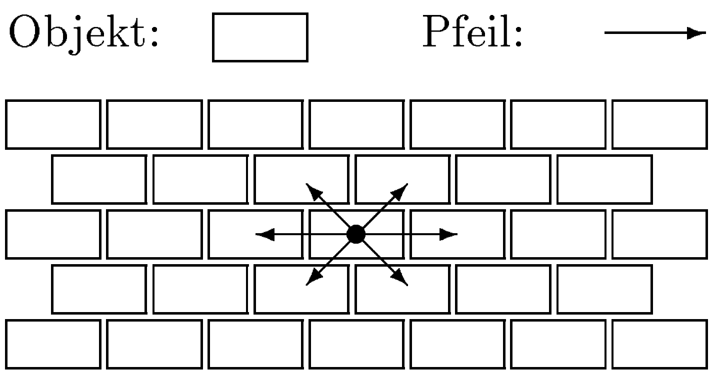


Figure 1: Ziegelsteinmauer als System aus Objekten und Beziehungen

Lektionen

1. Struktur ist ein durch die Pfeile festgelegtes Netz von Beziehungen
2. Die Pfeile können zusammengesetzt werden aus fundamentalen Pfeilen
3. Es gibt zu jedem Pfeil einen entgegengesetzten Pfeil.

Systeme

Nach klassischer Definition besteht ein System aus Agenzien und Beziehungen.

Agenzien = Objekte: $X, Y, ...$

Beziehungen = Pfeile: $f : X \mapsto Y$ *von* X *zu* Y

Es werden die folgenden Forderungen gestellt:

1. Unter den Beziehungen sind die Beziehungen $\iota_X : X \mapsto X$ der Identität eines jeden Objekts X mit sich selbst.
2. Die Beziehungen können zusammengesetzt werden. Mit Beziehungen f von X zu Y und g von Y zu Z ist eine Beziehung $g \circ f$ von X zu Z erklärt. Die Zusammensetzung ist assoziativ und Komposition mit der Identität gibt nichts Neues: $\iota_Y \circ f = f = f \circ \iota_X$.

3. Gewisse Beziehungen b werden als unmittelbare Beziehungen ausgezeichnet; alle andern Beziehungen können aus unmittelbaren Beziehungen zusammengesetzt werden. Die Identitätsbeziehungen ι_X sind unmittelbar.

4. Zu jeder Beziehung f von X zu Y gibt es eine (mögliche) entgegengesetzte Beziehung $f^* : Y \mapsto X$. Es gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Die Identität erfüllt $\iota_X = \iota_X^*$.

Es wird nicht verlangt, daß die entgegengesetzten Beziehungen im System vorhanden sind; sie sollen jedoch eindeutig bestimmt sein und hinzugefügt werden können. Gewöhnlich ist $f^{**} = f$.

Die Sprache der Gedanken

macht Aussagen über Systeme von folgendem Typen

1. Gewisse zusammengesetzte Pfeile von X zu X sind gleich der Identität ι_X;

2. Aussagen über An- oder Abwesenheit von entgegengesetzten Pfeilen;

3. Existenz von Invarianten.

Universelle Dynamik

ist Zeitentwicklung die für jedes System definiert ist, ohne Notwendigkeit irgendwelcher zusätzlicher Spezifikation.

Beispiel: Reproduktionsgabeldynamik

Diese Art der Dynamik ist die Basis des biologischen Lebens auf der Erde. Sie regiert die Replikation der DNS während der Zellteilung.
Sie ist eine universelle Kopiermaschine für **jede** Struktur mit beliebig vielen auf die Objekte zeigende Pfeilen und mit beliebigen Unterstrukturen. Die Dynamik ist auf allen Skalen dieselbe.

In der Mehrskalenanalyse nennt man dies einen Renormierungsgruppen-Fixpunkt.

Die folgenden Bewegungen sind in jeder (lokalen *-) Kategorie erklärt

1. Tod eines Objekts (oder Pfeils)
2. Replikation eines Objekts (oder Pfeils)
3. Fusion von ununterscheidbaren Objekten (oder Pfeilen)
4. Restitution eines fehlenden Adjungierten
5. Erklärung eines zusammengesetzten Pfeils als fundamental

Ein Bewegungsgesetz legt fest, welche Bewegung im nächsten Zeitschritt stattfindet, wenn der gegenwärtige Zustand gegeben ist (Dynamik 1-ter Ordnung) oder (im Fall einer Dynamik 2-ter Ordnung) wenn der gegenwärtige Zustand und die Bewegungen im vorherigen Zeitintervall gegeben sind.

Zwei Arten der Replikation eines Objekts sind möglich

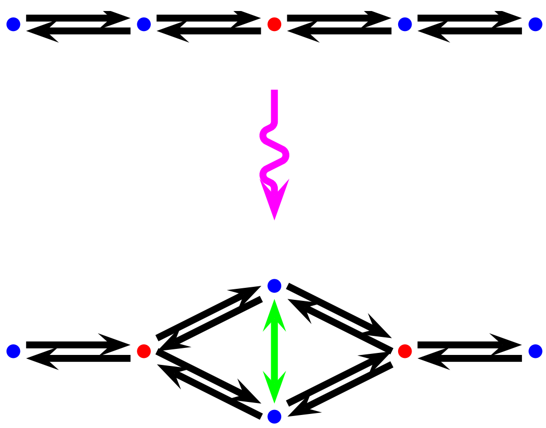
2a) mit Replikation der Pfeile von und zu dem Objekt

2b) Ohne Replikation von Pfeilen (die Pfeile werden aufgeteilt)

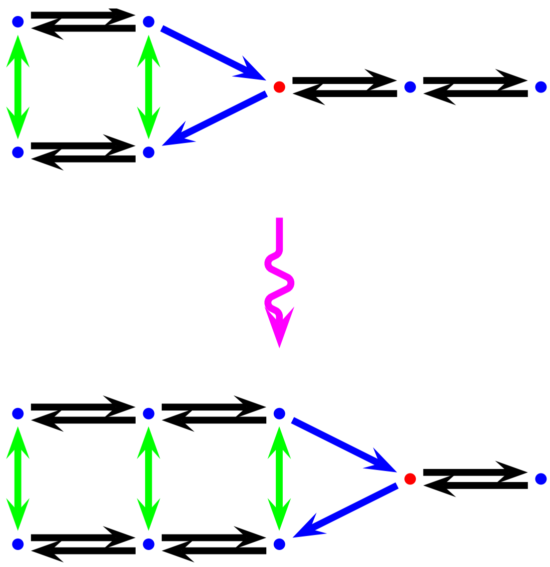
Reproduktionsgabeldynamik ist vom Typ 2b kombiniert mit 4. Die Gabeln legen fest, welches Objekt als nächstes verdoppelt wird (Dynamik 1-ter Ordnung)

5) ist der Prototyp jeder Art von Bewegung.

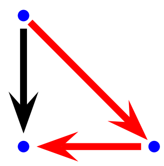
2a) Replikation eines Objekts samt seiner Pfeile



2b+4) Reproduktionsgabeldynamik:
Die roten Objekte werden im nächsten Zeitintervall repliziert.



5) Ein zusammengesetzter Pfeil wird fundamental.



Zusammengesetzte Objekte

Die Objekte des Systems können selbst Systeme, d.h. zusammengesetzt sein. Damit erreicht man eine uniforme Beschreibung auf verschiedenen Skalen, d.h verschiedenen Ebenen der Zusammengesetztheit.

Dies kann in C++ implementiert werden.

II. Universelle Problemlösungsstrategien

Bedeutung der Universalität:

Man könnte universelle Problemlösungstrategien schon in der Computer hardware implementieren, oder zumindest in sehr allgemein einsetzbarer software.

Minimierung eines lokalen Kostenfunktionals

Der Zustand eines Systems wird durch die aktuellen Pfeile f und Objekte X bestimmt. Sie sollen so bestimmt werden, daß

$$E_{System} = \sum_f E_f = min;$$

Lokalität: E_f für $f : X \mapsto Y$ hängt nur von f, X und Y ab.

Beispiel: Inhomogenes Lineares Gleichungssystem, z.B. diskretisierte Laplace Gleichung

(Ähnlich für Maxwell Gleichungen.)

$$L\chi = f$$

χ und f seien skalare oder Vektor-Funktionen auf einem hyperkubischen Gitter Λ_0 in d Dimensionen, mit Punkten z,

$$L\chi(z) = \sum_w U(z,w)\chi(w)$$

Laplace Gleichung $L = \Delta$: Pfeile konstant,

$$U(z,w) = 1$$

für nächste Nachbarn

$$U(z,z) = -d$$

andere =0.

Gleichungssystem äquivalent zur Minimierung eines quadratischen Kostenfunktionals
$E = \frac{1}{2} < \chi, L\chi > - < f, \chi >$, explizit

$$E = \sum_{z,w} \frac{1}{2} < \chi(z)U(z,w)\chi(w) > - \sum_z f(z)\chi(z)$$

Iteration

Gegeben eine Näherungslösung. Man bestimmt ein einzelnes Objekt X (oder einen einzelnen Pfeil f) neu so, dass bei gegebenen andern Pfeilen und Objekten die Summe der wenigen Beiträge zum Kostenfunktional, die von X abhängen, minimiert wird.

Beispiel: Lineare Gleichung

$$\chi_{neu}(z) = U(z,z)^{-1}\left(-f(z) + \sum_{w \neq z} U(z,w)\chi(w)\right)$$

Kritische Verlangsamung

Häufig konvergiert dieses lokale Verfahren schlecht.

Beispiel: Eindimensionale Laplace Gleichung auf Intervall I mit Randwerten 0, $f \equiv 0$. Exakte Lösung $\chi(z) \equiv 0$. Anfangswert sei Halbkreis über I.

Mehrskalenanalyse: Zusammengesetzte Objekte

Abhilfe: Es ist notwendig, in kohärenter Weise viele Objekte (und ggf Pfeile) gleichzeitig abzuändern.

1. Bestimme ein Arsenal von Vorschlägen der Veränderung in ausgedehnten Gebieten D (d.h. Operatoren die auf Objekte und Pfeile wirken)

2. Laufe durch Gebiete D aller Ausdehnungen (Skalen).

   Gegeben D, suche aus dem zugehörigen Arsenal diejenige Veränderung aus, die das Kostenfunktional am meisten erniedrigt

Beispiel: Für lineare Gleichungssysteme Vorschläge der Art

$$\delta\chi(z) = \gamma w_D(z)$$

mit vorbestimmten “wavelets” genannten Funktionen $w_D(z)$ mit Support D.

In günstigen Fällen kann man geeignete wavelets a priori angeben (traditionelle Mehrgitterverfahren), z.B. “Dachfunktionen” für die Laplace Gleichung. Aber nicht im allgemeinen !!!

These: Die Identifikation der relevanten Freiheitsgrade auf gröberen Skalen ist ein Kognitionsproblem.

Das iterative smoothing unigrid (ISU)

(M. Bäker, G.M.) Allgemeine Idee (Linearer Fall) :

- Schreite fort von feineren Skalen zu gröberen Skalen (d.h. von Gebieten kleiner Ausdehnung zu Gebieten größerer Ausdehnung)
- Bestimme die geeigneten wavelets auf Gebieten D einer Skala als Lösungen eines Optimierungsproblems auf D.

  Löse dieses Optimierungsproblem iterativ durch Benutzung der schon vorher gefundenen wavelets auf feineren Skalen.
- nachdem die wavelets gefunden sind, benutze sie als Arsenal von Verbesserungs-Vorschlägen für approximative Lösungen des ursprńglichen Problems.

Optimierungsproblem für wavelets im linearen Gl.-System

$$\begin{aligned} E = < w_D, Lw_D > &= min & (1)\\ w_D(z) &= 0 \text{ für } z \notin D & (2)\\ \sum_z ||w_D(z)||^2 &= 1 & (3) \end{aligned}$$

Beispiel: Laplace Gleichung mit Unordnung

$$U(z,w) \neq 1$$

für z nächster Nachbar von w, sondern zufällig verteilt.

Solche Probleme tauchen in der Gittereichtheorie der Elementarteilchenphysik auf (z.B. Dirac Gleichung im elektromagnetischen Feld)
Beispiel: $\chi(z) \in \mathbf{C}^2, U(z,w) \in SU(2)$.

Nichtlineare Probleme: Um ein lokales Minimum zu finden, linearisiert man um die momentane Näherung.

Das Problem, daß man in einem nicht globalen Minimum stecken bleiben kann verlangt spezielle Strategien, die hier nicht zur Betrachtung stehen sollen.

Systemtheoretische Interpretation

Fasse die Gebiete D als neue Objekte eines Systems auf, die aus Objekten des ursprünglichen Systems zusammengesetzt sind (oder aus kleineren Gebieten). Die wavelets $w_D(z)$

liefern die Pfeile vom zusammengesetzten Objekt D zu seinen Konstituenten z.

D.h man lässt das System wachsen nach bestimmten Regeln. Die Regeln sind z.T. universell, und zum Teil hängen sie vom Kostenfunktional ab.

Lokalisierung der nichtuniversellen Aspekte

Betrachte als Beispiel das Optimierungsproblem zur Bestimmung der wavelets . Lagrange Multiplikator Methode sagt: $L_D w_D = \mathcal{E} w_D$

$\mathcal{E}$ = niedrigster Eigenwert= $Wert$ des Kostenfunktionals.

Iteration:

$$w_{Dneu}(z) = (U(z,z) + \mathcal{E})^{-1} \left(\sum_{w \neq z} U(z,w) w_D(w) \right)$$

letzter Term: $w_D(w)$ beschreiben Pfeile von D nach z und $U(z,w)$ sind Pfeile von w nach z. Abgesehen vom Faktor $(U(z,z) + \mathcal{E})^{-1}$ handelt es sich hier also um eine universelle Operation der Zusammensetzung von Pfeilen. " Ein zusammengesetzter Pfeil wird fundamental"

Andererseits ist die Berechnung von $(U(z,z) + \mathcal{E})^{-1}$ die Lösung eines Optimierungsproblems, in das nur ein fundamentaler Pfeil eines Objekts zu sich eingeht. Dieser Teil hängt vom Kostenfunktional ab, ist aber strikt lokal .

Zusammenfassung:

Universelle Netz-Dynamik kombiniert mit problemabhängigen Rechnungen an einzelnen Knoten.

Die Knoten könnten den Knoten eines massiv parallelen Rechners zugeordnet sein.