Darstellungstheorie der Bedeutung

Gerhard Mack

Seminar Hamburg 30 Januar 1996

Was ist Bedeutung?

Linguistik: Syntax und Semantik

Beispiel: Computersprachen, wie

FORTRAN, C, C++. Sie haben eine Syntax, die festlegt, was wohlgeformte Ausdrücke sind. Die Semantik beantwortet die Frage nach der Bedeutung.

Bedeutung für die CPU: Übersetzung in Maschinensprache

Bedeutung für Mathematiker: Zuordnung von mathematischen Operationen

Natürliche Sprachen: Grammatische Regeln bestimmen die

Der Rosetta Stein

bildete den Schlüssel zur Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen. Er enthält Paralleltexte in drei alten Schriften: Hieroglyphen, demotische Schrift, Griechisch. (Erlaß der in Memphis versammelten Priester zugunsten von Ptolemäus V. Epiphanes)

Figur 1

Den Hieroglyphen wird Bedeutung zugewiesen für den, der Griechisch versteht (oder eine schon ins Griechische übersetzte Sprache)

Bedeutung im Leben von Organismen

Man denke an einen einfachen Organismus, für den die Dinge der Welt nur 2 Bedeutungen haben können: essbar und nicht essbar. Die Regeln, nach denen aufgrund von Sinneseindrücken Bedeutung zugewiesen wird, können komplex sein.

Mathematiker unterscheiden wahr und falsch, und

Die spezielle Struktur natürlicher Sprachen

und gewisser Kunstsprachen: Mündliche Äusserungen bestehen aus zeitlich nacheinander hervorgebrachten Tönen

Dem entspricht in der Schrift eine *sequentielle Anordnung*

Formalisierung natürlicher Sprachen als Netzwerk von Beziehungen (Systeme): “Semantische Netze” (Chomsky).

Chemische Nomenklatur

Umsetzung von Strukturformeln in eine Kunstsprache, die wie natürliche Sprachen aus sequentiell angeordneten Symbolen besteht, mit gewissen syntaktischen Regeln. Die Abbildung genügt gewissen Regeln, die gewährleisten sollen, daß die Struktur erhalten bleibt sodass die chem. Verbindung identifiziert werden kann.

Vorteil der sequentiellen Anordnung: Lexika.

Figur 2

Vorläufige allgemeine Definition von Bedeutung

Strukturerhaltende Abbildung eines Systems (=Netzwerk von Beziehungen zwischen Objekten) in ein Bildsystem mit (teilweise) vorgegebener Struktur.

Man nennt die Bildobjekte die Bedeutung der Objekte, entsprechend für die Beziehungen.

Das Bildsystem kann bis auf Isomorphie gegeben sein (Beispiel Aussagenlogik), es kann eines aus einer Klasse von Systemen sein, es kann vorgegebene zusätzliche Struktur (d.h zusätzliche Beziehungen) haben, die nicht Bild einer Beziehung des Uersystems sind (Beispiel: Darstellungstheorie von Gruppen, Nachfolge-Beziehungen in natürlichen Sprachen ("Verb vor Objekt"))

Bedeutung ist immer Bedeutung für einen "Beobachter"
Nur durch Einschränkungen an die Struktur dieses Beobachters bekommt der Begriff "Bedeutung" Sinn.

Allgemeiner Rahmen: Systeme Wie beschreibt man Struktur?

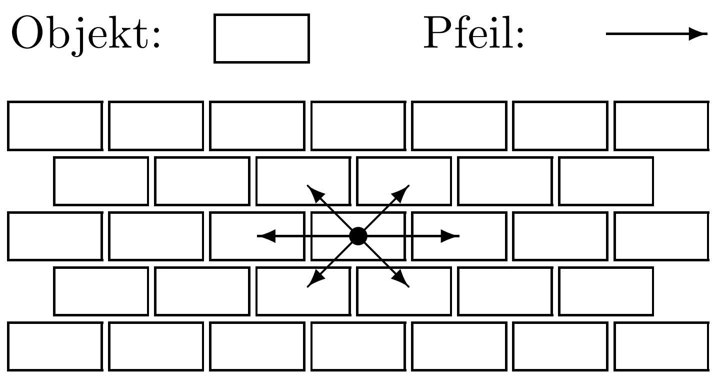

Figure 1: Ziegelsteinmauer als System aus Objekten und Beziehungen

1. Struktur ist ein durch die Pfeile festgelegtes Netz von Beziehungen
2. Die Pfeile können zusammengesetzt werden aus fundamentalen Pfeilen
3. Es gibt zu jedem Pfeil einen entgegengesetzten Pfeil.

Systeme

Es werden die folgenden Forderungen gestellt:

1. Unter den Beziehungen sind die Beziehungen $\iota_X : X \mapsto X$ der Identität eines jeden Objekts X mit sich selbst.

2. Die Beziehungen können zusammengesetzt werden. Mit Beziehungen f von X zu Y und g von Y zu Z ist eine Beziehung $g \circ f$ von X zu Z erklärt. Die Zusammensetzung ist assoziativ und Komposition mit der Identität gibt nichts Neues: $\iota_Y \circ f = f = f \circ \iota_X$.

3. Gewisse Beziehungen b werden als unmittelbare Beziehungen ausgezeichnet; alle andern Beziehungen können aus unmittelbaren Beziehungen zusammengesetzt werden. Die Identitätsbeziehungen ι_X sind unmittelbar.

4. Zu jeder Beziehung f von X zu Y gibt es eine (mögliche) entgegengesetzte Beziehung $f^* : Y \mapsto X$. Es gilt
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$
Die Identität erfüllt $\iota_X = \iota_X^*$.

Es wird nicht immer verlangt, daß die entgegengesetzten

Pfeilen zu Pfeilen erklären kann. Deshalb kann man Zusammensetzungsregeln durch *Relationen* definieren, die sagen, dass bestimmte Pfeile gleich sind.

Die Sprache der Gedanken

macht Aussagen über Systeme z.B. von folgendem Typ

- Gewisse zusammengesetzte Pfeile von X zu X sind gleich der Identität ι_X;

Kompositionsregeln für Objekte

Die Objekte eines Systems können selbst wieder Systeme sein $\Rightarrow$ Gleichartige Beschreibung auf verschiedenen Ebenen der Zusammengesetztheit.

Binäre Komposition: Paare von Objekten A, B werden zu "zusammengesetzten Objekten $(A|B)$" erklärt. Pfeile zu den Konsituenten:

$$A \longleftarrow (A|B) \longrightarrow B$$

Zusammensetzungsregel für die neuen Pfeile ist ggf. anzugeben.

Mehrskalen-Problemlösungsalgorithmen, z.B. ISU (s. später)

Systemtheoretische Präzision der Definition von Bedeutung

Funktorielle Abbildung F eines Systems in ein Bildsystem mit (teilweise) vorgegebener Struktur, d.h. wenn $f : X \mapsto Y$ und $g : Y \mapsto Z$, dann

$$
\begin{aligned}
F(f) : F(X) &\mapsto F(Y), \\
F(\iota_X) &= \iota_{F(X)} \\
F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \\
F(\text{fundamentaler Pfeil}) &\mathit{ist} \text{ fundamentaler Pfeil}
\end{aligned}
$$

und im Fall von Kompositionsregeln

$$F(X|Y) = F(X)|F(Y) \tag{1}$$

wobei das zweite $|$ die Komposition im Bildsystem ist.

Einige Beispiele

Gruppenmultiplikation $\circ$, adjungierter Pfeil=Inverses.

Darstellung F:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

jedoch sind F *nicht* Abbildungen in eine *beliebige* Gruppe, sondern die Bildgruppe hat zusätzliche Struktur:

Bildobject = Hilbertraum

Bildpfeile: lineare Abbildungen des Hilberraums

Daraus resultieren zusätzliche Beziehungen im Bildsystem, z.B.

$$F(f) = \alpha F(g_1) + \beta F(g_2).$$

Inäquivalente Darstellungen existieren, weil homomorphe Abbildungen $F_1(g) \mapsto F_2(g)$ diese zusätzliche Struktur nicht zu respektieren brauchen.

Aussagenlogik

Objekte: Aussagen A.

Pfeile: $\Rightarrow$ *(folgt aus)*, $\sim$ *(nicht)*.

Jedoch können alle Junktoren aus nur einem einzigen Junktor | *(weder noch)* gemacht werden, sodass es tatsächlich nur eine Art der Komposition gibt Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \neg A &= A|A \\ A \vee B &= \neg(A|B) = ((A|B)|(A|B)) \\ A \wedge B &= (\neg A|\neg B) = ((A|A)|(B|B)) \\ A \supset B &= B \vee \neg A = \neg(B|\neg A) = (B|(A|A))|(B|(A|A)). \end{aligned}$$

Wir werden sehen, daß wir auch nur einen Typ von Pfeil $\rightarrow$ brauchen, mit der intendierten Interpretation "*schließt aus*".

Zuweisung von Bedeutung: Den Aussagen wird die Bedeutung $W = wahr$ oder $F = falsch$ zugewiesen, wobei gewisse Regeln eingehalten werden müssen, z.B. ist die Zuweisung $(A|\neg A) = W$ unzulässig (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)

Darstellungstheorie

Bildsystem: Ein ganz spezielles System WF mit zwei Objekten W und F, das in der Sprache der Gedanken

Zusammensetzungsregel für Pfeile durch Relationen

$$x : W \mapsto F, \qquad x^{ast} : F \mapsto W, \qquad o : F \mapsto F$$

$$x \circ x^* = \iota_F, \qquad x^* \circ x = \iota_W, \qquad o^* = o, \qquad o \circ o = o.$$

Komposition von Objekten

$$W|W = F, \qquad W|F = F, \qquad F|W = F, \qquad F|F = W$$

Definition 1 *Eine* logische Darstellung *ist eine funktorielle Abbildung eines Systems mit binärer Kompositionsregel in das eben beschriebene Bildsystem* WF*.*

Definiert für ganz beliebige Systeme.
Aussagenlogik: Einschränkung an das Ursystem: Der adjungierte Pfeil f^* jeden fundamentalen Pfeils f existiert, ist jedoch verschieden vom Inversen, *ausser*

$$A \leftrightarrows (A|A)$$

"Kompatibilitätsbedingung für Negationen"

Betrachte Systeme mit binärer Komposition für Objekte (| geschrieben), das dieser Bedingung genügt.

Theorem 1 *Logische Darstellungen erfüllen die Axiome*

$$
\begin{aligned}
A = W \quad &\Rightarrow \quad (B \supset A) = W. \\
(A \supset (B| \supset C)) = W \quad &\Rightarrow \quad ((A \supset B) \supset (A \supset C)) = W \\
(\neg A \supset \neg B) = W \quad &\Rightarrow \quad (b \supset A) = W.
\end{aligned}
$$

Axiome X brauchen nicht als Forderung $X = W$ an die Darstellung formuliert werden, sondern können als Teil des Ursystems betrachtet werden. Aussagen A sollen Axiome heissen, wenn ein Untersystem der Form

$$\neg(X|\neg X) \to \neg A$$

existiert. Es folgt daraus für jede Darstellung, daß $A = W$.

Entscheidbarkeit: Die Aussagenlogik ist entscheidbar, d.h. man kann durch Algorithmus entscheiden, ob die Wahrheit einer Aussage aus gegebenen Axiomen folgt: "Aquivalenz von Syntax und Semantik".

Anders gesagt: Die Darstellungen können durch einen Algorithmus konstruiert werden. Die Darstellung wird nicht eindeutig sein, wenn der Wahrheitswert gewisser Aussagen nicht aus den Axiomen folgt.

Prädikatenlogik

Für Systeme ohne freie Variable ist das Bildsystem dasselbe wie für die Aussagenlogik.

Die Prädikatenlogik ist nicht entscheidbar.

Wertfreie Differenzierung

Darstellung von Sachbverhalten durch mehrere Koordinaten, die jedoch nur zwei Werte annehmen können. Bildsystem:

Arithmetik (Gödels Theoreme)

Ausgangspunkt: Formelles System (typographische Arithmetik) mit syntaktischen Regeln, die festlegen, was wohlgeformte Aussagen über natürliche Zahlen sind.

Darstellung: Zuordnung von Werten "W" oder "F" zu den Aussagen, analog zur Logik, gemäss Darstellungsregeln wie gehabt

Es gibt inq̈uivalente Darstellungen der (typographischen) Arithmetik, wenn es überhaupt welche gibt ("Nichtstandard Arithmetik").

Widerspruchsfreiheit, d.h. Existenz von Darstellungen kann nur auf der Basis von Annahmen bewiesen werden, die stärker sind als die Axiome der typographischen Arithmetik.

Konstruktion von Bedeutung

Gewöhnlich durch einen iterativen Prozess, der tentativ Bedeutung zuweist. Oft geht man dabei vor durch Integration von Teilen zu grösseren Teilen. Dies kann auch zu Widersprüchen führen, vgl. Eschgers Bild.

- Projektion auf irreduzible Teile
- Identifikation gemeinsamer Teile zweier Darstellungen

Die grundlegende Konstruktion beruht auf Verschränkungsoperatoren (intertwiners) vulgo "Clebsch Gordan Koeffizienten" genannt.

Konstruktion von Darstellungen durch Mehrskalenanalyse: Das Universelle adaptive Eingitter, ein Nachfahre von ISU

Minimierung eines lokalen Kostenfunktionals

Der Zustand eines Systems wird durch die aktuellen Pfeile f und Objekte X bestimmt. Sie sollen so bestimmt werden, daß

$$E_{System} = \sum_f E_f = min;$$

Lokalität: E_f für $f : X \mapsto Y$ hängt nur von f, X und Y ab.

χ und f seien skalare oder Vektor-Funktionen auf einem hyperkubischen Gitter Λ_0 .

Gleichungssystem äquivalent zur Minimierung eines quadratischen Kostenfunktionals
$E = \frac{1}{2} < \chi, L\chi > - < f, \chi >$, explizit

$$E = \sum_{z,w} \frac{1}{2} < \chi(z)U(z,w)\chi(w) > - \sum_{z} f(z)\chi(z)$$

Iteration

Gegeben eine Näherungslösung. Man bestimmt ein einzelnes Objekt X (oder einen einzelnen Pfeil f) neu so, dass bei gegebenen andern Pfeilen und Objekten die Summe der wenigen Beiträge zum Kostenfunktional, die von X abhängen, minimiert wird. (Adjustiere $\chi(z)$ für *ein* z.)

Kritische Verlangsamung

Häufig konvergiert dieses lokale Verfahren schlecht.

Beispiel: Eindimensionale Laplace Gleichung auf Intervall I mit Randwerten 0, $f \equiv 0$. Exakte Lösung $\chi(z) \equiv 0$. Anfangswert sei Halbkreis über I.

Für lineare Gleichungssysteme Vorschläge der Art

$$\delta\chi(z) = \gamma w_\alpha(z)$$

mit vorbestimmten "wavelets" genannten Funktionen $w_\alpha(z)$ mit Support D.

Das iterative smoothing unigrid (ISU)

(M. Bäker, G.M.) Allgemeine Idee

- Schreite fort von feineren Skalen zu gröberen Skalen (d.h. von Gebieten kleiner Ausdehnung zu Gebieten größerer Ausdehnung)
- Bestimme die geeigneten wavelets auf Gebieten D einer Skala als Lösungen eines Optimierungsproblems auf D.

  Löse dieses Optimierungsproblem iterativ durch Benutzung der schon vorher gefundenen wavelets auf feineren Skalen.
- nachdem die wavelets gefunden sind, benutze sie als Arsenal von Verbesserungs-Vorschlägen für approximative Lösungen des ursprńglichen Problems.

aneinander).

$$AA|BABCA|BCD|AB|CDE|ABCDEF$$

$$BABCA|BCD|AB|CDE \qquad AA|BABCD|BCD|AB$$

$$AB|CDE \qquad CDE|AB \qquad BCD|AB \qquad CDE|ABCDEF \qquad AA|BABCA\ldots$$

$$AB \qquad CDE \qquad AA \qquad BABCA \qquad ABCDEF$$

$AABABCABCDABCDEABCDEF$ “Umgebung”

Algorithmen der Aussagenlogik

1. Vereinfachung: Bringe die Aussagen in standardisierte Form
   (z.B. ist $(A \mid A) \mid (A \mid A) = A$) für Zwecke der Darstellungstheorie)

2. Baue die Darstellung schrittweise aus Darstellungen von Teilsystemen auf, analog dem Algorithmus für das 1-dimensionale puzzle. Dazu muß die Verträglichkeit von Darstellungen der Teilsysteme geprüft werden.

Kosten ∞ bei Widerspruch, -1 bei Überlapp oder bei

$$
\begin{tikzcd}
& (A \mid B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\mathrm{A}} \arrow[d] & \leftrightharpoons & \boxed{\mathrm{B}} \arrow[d] \\
W & \leftrightharpoons & F \supset
\end{tikzcd}
$$