Lektionen aus der Mehrskalenanalyse der Quantenfeldtheorie

Gerhard Mack

Seminar Goettingen 15. Juni 1995

Literatur:

M. Grabowski, Low energy effective actions with composite fields, DESY 94-146

M. Bäker, G. Mack, M. Speh, in: Handbook of Neural Computation (im Druck)

M. Bäker, Dissertation Hamburg, Juni 1995

These: Die Identifikation der relevanten Freiheitsgrade auf gröberen Skalen ist ein Kognitionsproblem.

Seine Lösung kann auf ein Optimierungsproblem zurückgeführt werden ("survival of the fittest").

Um dieses Problem zu lösen, baut man schrittweise Objekte auf gröberen aus schon vorher bestimmten Objekten auf feineren Skalen.

Beispiele:

1. Berechnung von Propagatoren in einem nichtabelschen

Eichfeld.
(von praktischer Bedeutung bei der
Computer-Simulation von Gittereichtheorien mit
dynamischen Fermionen

2. Renormierungsgruppentransformationen mit zusammengesetzten Blockspins
(von praktischer Bedeutung z.B. in der Supraleitung)

Das iterativ glättende Eingitter (ISU)

ein Mehrskalenverfahren zur iterativen Lösung von diskretisierten elliptischen partiellen Differentialgleichungen mit Unordnung, d.h. ohne näherungsweise Translationssymmetrie.

Inhomogene Lineare Gleichungssysteme

$$L\chi = f$$

χ und f seien z. B. Vektor-Funktionen auf einem hyperkubischen Gitter Λ_0 in d Dimensionen, mit Punkten z,

$$L\chi(z) = \sum_w U(z,w)\chi(w) + m\chi(z),$$

Summe über $w = z$ und nächste Nachbarn w von z.

1. Laplace Operator L: U =Gitter-Eichfeld
   $U(z,w) \in G$ =Eichgruppe, für $w \neq z$
   $U(z,z) = 2d\mathbf{1}$.

2. Dirac Operator auf dem Gitter: (Kogut Susskind Formulierung)
   $U(z,w) = \eta(z,w)\times$ Gitter-Eichfeld wie oben,
   $U(z,z) = 0$

   Ersatz für die Dirac Gamma-Matrizen: $\eta(z,w) = \pm 1$.

$\eta(z+\hat{\mu}+\hat{\nu}, z+\hat{\mu})\eta(z+\hat{\mu}, z) = -\eta(z+\hat{\nu}+\hat{\mu}, z+\hat{\nu})\eta(z+\hat{\nu}, z)$
für $\mu \neq \nu$,
$\eta(z, w)\eta(w, z) = -1.$

Für Propagatoren ist $f(z) = \delta(z - z_0)$.

Renormierungsgruppe mit zusammengesetzten Blockspins in der Quantenfeldtheorie

Fermifelder mit N Komponenten mit 4-Fermi Wechselwirkung,
mit UV-Cutoff Λ_0, freiem Fermion-Propagator u_Λ und 4-Fermi-Kopplung λ.

$$S = \bar{\psi} u_{\Lambda_0}^{-1} \psi - \bar{\psi}\psi \frac{\lambda}{N} \bar{\psi}\psi.$$

$$S = S_{free} + V_{\Lambda_0}$$

Beispiele:

1. **Gross Neveu-Modell in 2 Raum-Zeit Dimensionen:**
   Dirac Propagator im Impulsraum hat Betrags-Maximum bei $k = 0$
2. **Supraleitung:**
   Propagator komplex, hat Betrags-Maximum bei $\epsilon(k) = \epsilon_F$ (Energie der Fermi-Kante, im kugelsymmetrischen Fall beispielsweise $\epsilon(k) \propto k^2$.

Ziel: Erniedrige den Cutoff Λ_0. Berechne effektive Wirkungen S_Λ als Funktion des neuen Cutoff (im Kontinuum).

Forderung: Die effektive Wirkung soll lokal sein auf der durch den UV-cutoff gegebenen Längenskala.

1. Versuch: Zerlege ψ in hoch und niederfrequenten Anteil, integriere den hochfrequenten Anteil aus.

Der Zerlegung des Felds entspreche eine Zerlegung des freien Propagators

$$u_{\Lambda_0} = u_\Lambda + v$$

wo $v = v_{\Lambda_0 \Lambda}$ der Propagator des hochfrequenten Anteils; er hat daher einen Infrarot-Cutoff (eine Masse).

Resultat: Zu führender Ordnung in $\frac{1}{N}$ (in n Dimensionen)

$$\begin{aligned} \exp\left(-V_\Lambda(\psi)\right) &= \\ \exp\{\frac{\delta}{\delta\Delta}\lambda_\Lambda\frac{\delta}{\delta\Delta}\} & \qquad \exp\left(-\tilde{V}_\Lambda(\Delta|\bar{\psi},\psi)\right)|_{trees\, only, \Delta=0} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\Lambda(\Delta|\bar{\psi},\psi) &= -2N\Delta\bar{\psi}\psi - 2N\Delta\bar{\psi}\{v^{-1} - 2\Delta\}^{-1}\psi 2N\Delta \\ &- 2\Delta tr_\gamma(v\bar{v})\Delta - Tr\ln(1-2\Delta v) \end{aligned}$$

und dem Hilfspropagator λ_Λ im Impulsraum, der die alte Kopplungskonstante λ ersetzt.

$$\lambda_\Lambda(p) = \frac{\lambda}{N + 2\lambda\int(2\pi)^{-n}d^n l\ tr_\gamma\left(v(l+p)v(l)\right)}.$$

Graphische Darstellung des Resultats, siehe Fig. 20,21

Auftreten von Nichtlokalitäten in der effektiven Wirkung

Wenn $\lambda_\Lambda(p)$ einen Pol in p hat bei einem Wert $p^2 < \Lambda$, so hat der in der Figur geschlängelt dargestellte Hilfspropagator λ_Λ einen Abfall im Ortsraum, der langsamer ist , als der von der Lokalität geforderte Abfall mit Zerfallslänge höchstens Λ^{-1}

Durch Inspektion der obigen Integraldarstellung für λ_Λ findet man:

Ungeachtet der Schwäche der ursprünglichen 4-Fermi Kopplung tritt diese Situation der Nichtlokalität bei hinreichend kleinem Werten des UV-cutoff schließlich immer auf

1. im 2-dimensionalen Gross-Neveu Modell,
2. im Fall der Supraleitung, vorausgesetzt die Fermioberfläche ist symmetrisch, $\epsilon(-p) = \epsilon(p)$.

Behebung der Nichtlokalität durch Einführung eines zusätzlichen skalaren Felds (zusammengesetzter Blockspin) in die effektive Wirkung.

Das Skalarfeld wird so eingeführt, dass sein Propagator gleich dem niederfrequenten (nichtlokalen) Anteil des geschlängelten Hilfspropagator ist. Dieser nichtlokale Propagator tritt dann aber erst in Erscheinung, wenn das Skalarfeld ausintegriert wird. Diese Ausintegration wird jedoch aufgeschoben und erst nach und nach ausgeführt, nachdem der Cutoff weiter erniedrigt worden ist.

Warnung: Auch nachdem das Skalarfeld einmal aufgetreten ist, kann man nicht weiterfahren, indem man einfach die hochfrequenten Teile der Fermi- und Skalarfelder ausintegriert. Das würde wieder zu Nichtlokalitäten führen. Man muss stattdessen dem Skalarfeldpropagator (d.h. seinem kinetischen Term) wiederum neue Beiträge fermionischen Ursprungs hinzufügen.

Zerteile den Hilfspropagator in hoch- und niederfrequente Anteile

$$\lambda_\Lambda = \lambda_\Lambda^L + \lambda_\Lambda^H .$$

Definiere

$$\exp\left(-V_\Lambda(\phi|\bar{\psi}\psi)\right) \quad = \quad \exp\{\frac{\delta}{\delta\phi}\lambda_\Lambda^H\frac{\delta}{\delta\phi}\}$$
$$\exp\left(-\tilde{V}_\Lambda(\phi|\bar{\psi},\psi)\right)|_{trees\,only}$$

Die vollständige effektive Wirkung wird

$$S_{eff} = \bar{\psi}u_\Lambda\psi + \phi G_\Lambda^{-1}\phi + V_\Lambda(phi|\bar{\psi}\psi).$$

mit $G_\Lambda = \lambda_\Lambda^L$.

Diese Wirkung enthält sowohl Fermifelder als auch ein zusammengesetztes Skalarfeld (Elektronen und Cooperpaare im Fall der Supraleitung)

Senkt man den Cutoff weit genug, so bekommt das Potential als Funktion von ϕ entartete Minima bei $\phi \neq 0$. Dies führt dann schlußendlich zu einem nichtverschwinndenden Vakuumerwartungswert von ϕ.

Allgemeine Theorie

Um bei Ausintegration der hochfrequenten Fermi-Moden auftretende Nichtlokalitäten durch Einführen eines Bosefelds eliminieren zu können, muß man zeigen können, daß die nichtlokalen Terme die von Figur 20 suggerierten Faktorisierungseigenschaften haben.

Zu führender Ordnung in $\frac{1}{N}$ kommt dies im bisher betrachteten Modell wegen der expliziten Form der Summe der bubble-Diagramme so heraus.

Allgemeines Argument: Benutze den von Symanzik angegebenen unendlichen Satz von Bethe-Salpeter Gleichungen für 1-Teilchen irreduzible Greens-Funktionen.

(Die Propagatoren in deren Störungsentwicklung sind unsere hochfrequenten Propagatoren v, die verbleibenden Felder treten als äußere Linien auf.)

Figuren 35, 36, 37

Der darin vorkommende Bethe-Salpeter Operatoren B wirken auf einen Raum von 2-Teilchen Wellenfunktionen $\Phi(z_1, z_2)$ mit Skalarprodukt

$$< \Phi_1, \Phi_2 >= \int_{z_1,z_2} \int_{z_1',z_2'} \bar{\Phi}_1(z1, z_2) v(z_1, z_1') v(z_2, z_2') \Phi_2(z1, z_2)$$

Diese Gleichungen können durch formale Inversion von $(1 - B)$ gelöst werden.

Figur 40, in kompakterer Form Figur 42 mit Definition Figur 41

Man diagonalisiert simultan den Operator $P =$ des Gesamtimpulses der beiden Teilchen und B.

Nichtlokalitäten treten auf, wenn es simultane Eigenvektoren von B zum Eigenwert 1 und von P zu einem Eigenwert p mit $p^2 < \Lambda$ gibt.

$$(1 - B)\Phi_p = 0; \qquad P\,\Phi_p = p\,\Phi_p \ .$$

Die Eigenvektoren ("Bethe-Salpeter-Amplituden")

$$\Phi_p(z_1, z_2)$$

werden benutzt, um die Vertexfunktionen des einzuführenden Skalarfelds zu konstruieren.

Die Rechnung erscheint für infinitesimale Renormierungsgruppenschritte praktikabel, da die hochfrequenten Propagatoren dann infinitesimal klein sind.

(Wir nehmen an, dass die 2-Teilchen-irreduziblen Amplituden keine Nichtlokalitäten haben, andernfalls müsste man gebundene Zustände aus 3 Teilchen betrachten.)

Schlussfolgerung

Wie schon im Fall der Lösung von Differentialgleichungen im ungeordneten Fall führte die Bestimmung der auf einer Längenskala relevanten Freiheitsgrade wieder auf die Lösung einer Eigenwertgleichung, wobei Eigenvektoren zu hinreichend kleinen Eigenwerten gesucht werden. Was hinreichend klein ist, wird durch die Längenskala bestimmt.